Probabilités conditionnelles
Construire et exploiter un arbre pondéré

Exercice 1. Construire et lire un arbre

Dans une entreprise, 35 % des salariés travaillent au service commercial (C), les autres au service production. Parmi les commerciaux, 60 % utilisent une voiture de fonction (V) ; parmi les salariés de la production, 10 % en utilisent une. On choisit un salarié au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré associé à la situation.

   Arbre : $P(C) = 0,35$, $P(\overline{C}) = 0,65$; $P_C(V) = 0,60$, $P_C(\overline{V}) = 0,40$; $P_{\overline{C}}(V) = 0,10$, $P_{\overline{C}}(\overline{V}) = 0,90$.

2. Que représente le nombre 0,6 ? Le noter avec une probabilité conditionnelle.

   $0,6 = P_C(V)$: parmi les salariés du service commercial, 60 % utilisent une voiture de fonction.

3. Calculer la probabilité que le salarié soit un commercial ayant une voiture de fonction.

   $P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,35 \times 0,60 = 0,21$.

4. Calculer $P(\overline{C} \cap V)$.

   $P(\overline{C} \cap V) = 0,65 \times 0,10 = 0,065$.

5. En déduire la probabilité qu'un salarié ait une voiture de fonction.

   $P(V) = 0,21 + 0,065 = 0,275$.

6. Un salarié a une voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il soit commercial ?

   $P_V(C) = \dfrac{0,21}{0,275} = \dfrac{42}{55} \approx 0,764$.

7. Calculer la probabilité qu'un salarié n'ait pas de voiture de fonction.

   $P(\overline{V}) = 1 - 0,275 = 0,725$.

8. Un salarié n'a pas de voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il travaille à la production ?

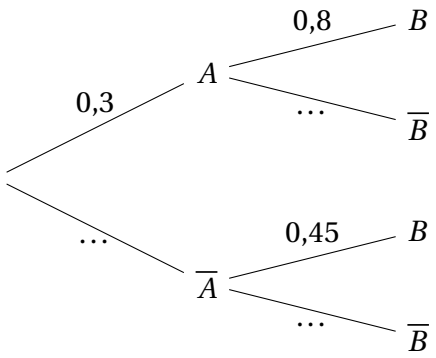
   $P_{\overline{V}}(\overline{C}) = \dfrac{0,65 \times 0,90}{0,725} = \dfrac{117}{145} \approx 0,807$.

9. L'entreprise compte 400 salariés. Combien de voitures de fonction possède-t-elle ?

   $400 \times 0,275 = 110$. L'entreprise possède 110 voitures de fonction.

Exercice 2. Compléter un arbre

On donne l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Compléter l'arbre.
   $P(\overline{A}) = 0,7$; $P_A(\overline{B}) = 0,2$; $P_{\overline{A}}(\overline{B}) = 0,55$.
2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\overline{A} \cap B)$ puis $P(B)$.
   $P(A \cap B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$; $P(\overline{A} \cap B) = 0,7 \times 0,45 = 0,315$; donc $P(B) = 0,555$.
3. Calculer $P_B(A)$ arrondi au millième.
   $P_B(A) = \dfrac{0,24}{0,555} \approx 0,432$.
4. Calculer $P(\overline{B})$ de deux façons.
   $P(\overline{B}) = 1 - 0,555 = 0,445$. Aussi : $0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,55 = 0,445$.
5. Calculer $P_{\overline{B}}(\overline{A})$ arrondi au millième.
   $P_{\overline{B}}(\overline{A}) = \dfrac{0,7 \times 0,55}{0,445} \approx 0,865$.
6. Les événements A et B sont-ils indépendants ? Justifier.
   Non, car $P_A(B) = 0,8 \neq P(B) = 0,555$.

Appliquer la formule des probabilités totales

Exercice 3. Partition en trois événements

Un magasin de vêtements a trois fournisseurs : F_1 fournit 50 % des articles, F_2 30 % et F_3 20 %. Les taux d'articles défectueux sont respectivement 2 %, 4 % et 5 %. On choisit un article au hasard et on note D l'événement « l'article est défectueux ».

1. Construire l'arbre pondéré.

   Arbre : $P(F_1) = 0,50$, $P(F_2) = 0,30$, $P(F_3) = 0,20$; $P_{F_1}(D) = 0,02$, $P_{F_2}(D) = 0,04$, $P_{F_3}(D) = 0,05$, avec les probabilités complémentaires sur les autres branches.

2. Calculer $P(D)$.

   $P(D) = 0,50 \times 0,02 + 0,30 \times 0,04 + 0,20 \times 0,05 = 0,032$.

3. Un article est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_2 ?

   $P_D(F_2) = \dfrac{0,30 \times 0,04}{0,032} = 0,375$.

4. Calculer la probabilité qu'un article non défectueux provienne de F_1.

   $P_{\overline{D}}(F_1) = \dfrac{0,50 \times 0,98}{1 - 0,032} = \dfrac{0,49}{0,968} \approx 0,506$.

5. Calculer $P_D(F_1)$ et $P_D(F_3)$. Vérifier que $P_D(F_1) + P_D(F_2) + P_D(F_3) = 1$.

   $P_D(F_1) = \dfrac{0,01}{0,032} = 0,3125$ et $P_D(F_3) = \dfrac{0,01}{0,032} = 0,3125$. Ainsi $0,3125 + 0,375 + 0,3125 = 1$.

6. Le magasin reçoit 5 000 articles. Combien d'articles défectueux peut-il prévoir ?

   $5\,000 \times 0,032 = 160$. Il peut prévoir 160 articles défectueux.

7. Le magasin veut que moins de 3 % des articles soient défectueux. Il remplace F_3 par un fournisseur ayant un taux de défaut t. Quelle valeur maximale de t convient ?

   Il faut $0,50 \times 0,02 + 0,30 \times 0,04 + 0,20t < 0,03$, soit $0,022 + 0,20t < 0,03$. Donc $t < 0,04$: le taux doit être strictement inférieur à 4 %.

Type bac

Exercice 4. Du tableau à l'arbre

Une étude sur 2 000 clients d'une banque donne :

	Application mobile (M)	Pas d'application	**Total**
Moins de 40 ans (J)	720	180	900
40 ans et plus	440	660	1 100
Total	1 160	840	2 000

1. Calculer $P(J)$, $P_J(M)$ et $P_{\overline{J}}(M)$.

   $P(J) = \dfrac{900}{2000} = 0,45$; $P_J(M) = \dfrac{720}{900} = 0,8$; $P_{\overline{J}}(M) = \dfrac{440}{1100} = 0,4$.

2. Construire l'arbre pondéré de premier niveau J et $\overline{J}$.

   Premier niveau : $P(J) = 0,45$ et $P(\overline{J}) = 0,55$. Puis $P_J(M) = 0,8$, $P_J(\overline{M}) = 0,2$, $P_{\overline{J}}(M) = 0,4$, $P_{\overline{J}}(\overline{M}) = 0,6$.

3. Retrouver $P(M)$ par la formule des probabilités totales et vérifier avec le tableau.

   $P(M) = 0,45 \times 0,8 + 0,55 \times 0,4 = 0,58$. Avec le tableau : $\dfrac{1160}{2000} = 0,58$.

4. Un client utilise l'application. Quelle est la probabilité qu'il ait moins de 40 ans ?

   $P_M(J) = \dfrac{720}{1160} = \dfrac{18}{29} \approx 0,621$.

5. Calculer $P(J \cup M)$.

   $P(J \cup M) = P(J) + P(M) - P(J \cap M) = 0,45 + 0,58 - \dfrac{720}{2000} = 0,67$.

6. Construire l'autre arbre, de premier niveau M et $\overline{M}$.

   Premier niveau : $P(M) = 0,58$, $P(\overline{M}) = 0,42$. Puis $P_M(J) = \dfrac{720}{1160} \approx 0,621$, $P_M(\overline{J}) \approx 0,379$, $P_{\overline{M}}(J) = \dfrac{180}{840} \approx 0,214$, $P_{\overline{M}}(\overline{J}) \approx 0,786$.

7. La banque affirme : « L'âge n'a pas d'influence sur l'usage de l'application. » Qu'en pensez-vous ?

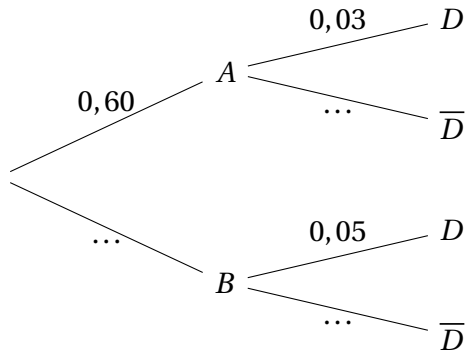
   Cette affirmation est fausse : $P_J(M) = 0,8$ alors que $P_{\overline{J}}(M) = 0,4$. L'usage dépend donc de la tranche d'âge.

Exercice 5. Type bac – contrôle de la qualité d'un produit

Une entreprise commercialise des batteries pour vélos électriques. Elle possède deux sites de production, notés A et B. Le site A produit 60 % des batteries et le site B produit les autres batteries.
Une batterie est contrôlée avant sa commercialisation. On note D l'événement « la batterie est déclarée défectueuse par le contrôle ». On sait que 3 % des batteries produites par le site A et 5 % des batteries produites par le site B sont déclarées défectueuses.
On choisit au hasard une batterie dans la production d'une journée.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant cette situation.

   $P(A) = 0,60$, $P(B) = 0,40$; $P_A(D) = 0,03$, $P_A(\overline{D}) = 0,97$; $P_B(D) = 0,05$, $P_B(\overline{D}) = 0,95$.



2. Calculer la probabilité que la batterie choisie provienne du site A et soit déclarée défectueuse.

   $P(A \cap D) = 0,60 \times 0,03 = 0,018$.

3. Montrer que $P(D) = 0,038$.

   $P(D) = 0,60 \times 0,03 + 0,40 \times 0,05 = 0,018 + 0,020 = 0,038$.

4. La batterie choisie est déclarée défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne du site B. Arrondir au millième.

   $P_D(B) = \dfrac{0,40 \times 0,05}{0,038} = \dfrac{10}{19} \approx 0,526$.

5. Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.

   Non, car $P_A(D) = 0,03 \neq P(D) = 0,038$.

6. L'entreprise produit 25 000 batteries par jour. Estimer le nombre de batteries déclarées défectueuses au cours d'une journée.

   $25\,000 \times 0,038 = 950$. On estime à 950 le nombre de batteries déclarées défectueuses.

7. Pour améliorer la qualité, le site B met en place une nouvelle procédure. Son taux de batteries déclarées défectueuses devient t, les autres données res-

tant inchangées. Déterminer la valeur maximale de t pour que la probabilité qu'une batterie soit déclarée défectueuse soit inférieure ou égale à 3,5 %.

$0,60 \times 0,03 + 0,40t \leq 0,035$, donc $0,018 + 0,40t \leq 0,035$. Ainsi $t \leq 0,0425$. Le taux maximal est 4,25 %.