

Probabilités conditionnelles

Construire et exploiter un arbre pondéré

Exercice 1. Construire et lire un arbre

Dans une entreprise, 35 % des salariés travaillent au service commercial (C), les autres au service production. Parmi les commerciaux, 60 % utilisent une voiture de fonction (V) ; parmi les salariés de la production, 10 % en utilisent une. On choisit un salarié au hasard.

1. Construire l'arbre pondéré associé à la situation.

Arbre : $P(C) = 0,35$, $P(\bar{C}) = 0,65$; $P_C(V) = 0,60$, $P_C(\bar{V}) = 0,40$; $P_{\bar{C}}(V) = 0,10$, $P_{\bar{C}}(\bar{V}) = 0,90$.

2. Que représente le nombre 0,6 ? Le noter avec une probabilité conditionnelle.
 $0,6 = P_C(V)$: parmi les salariés du service commercial, 60 % utilisent une voiture de fonction.

3. Calculer la probabilité que le salarié soit un commercial ayant une voiture de fonction.

$$P(C \cap V) = P(C) \times P_C(V) = 0,35 \times 0,60 = 0,21.$$

4. Calculer $P(\bar{C} \cap V)$.

$$P(\bar{C} \cap V) = 0,65 \times 0,10 = 0,065.$$

5. En déduire la probabilité qu'un salarié ait une voiture de fonction.

$$P(V) = 0,21 + 0,065 = 0,275.$$

6. Un salarié a une voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il soit commercial ?

$$P_V(C) = \frac{0,21}{0,275} = \frac{42}{55} \approx 0,764.$$

7. Calculer la probabilité qu'un salarié n'ait pas de voiture de fonction.

$$P(\bar{V}) = 1 - 0,275 = 0,725.$$

8. Un salarié n'a pas de voiture de fonction. Quelle est la probabilité qu'il travaille à la production ?

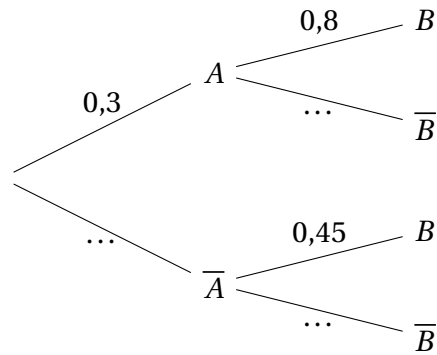
$$P_{\bar{V}}(\bar{C}) = \frac{0,65 \times 0,90}{0,725} = \frac{117}{145} \approx 0,807.$$

9. L'entreprise compte 400 salariés. Combien de voitures de fonction possède-t-elle ?

$$400 \times 0,275 = 110. \text{ L'entreprise possède 110 voitures de fonction.}$$

Exercice 2. Compléter un arbre

On donne l'arbre pondéré ci-dessous.



1. Compléter l'arbre.

$$P(\bar{A}) = 0,7; P_A(\bar{B}) = 0,2; P_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,55.$$

2. Calculer $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ puis $P(B)$.

$$P(A \cap B) = 0,3 \times 0,8 = 0,24; P(\bar{A} \cap B) = 0,7 \times 0,45 = 0,315; \text{ donc } P(B) = 0,555.$$

3. Calculer $P_B(A)$ arrondi au millième.

$$P_B(A) = \frac{0,24}{0,555} \approx 0,432.$$

4. Calculer $P(\bar{B})$ de deux façons.

$$P(\bar{B}) = 1 - 0,555 = 0,445. \text{ Aussi : } 0,3 \times 0,2 + 0,7 \times 0,55 = 0,445.$$

5. Calculer $P_{\bar{B}}(\bar{A})$ arrondi au millième.

$$P_{\bar{B}}(\bar{A}) = \frac{0,7 \times 0,55}{0,445} \approx 0,865.$$

6. Les événements A et B sont-ils indépendants? Justifier.

$$\text{Non, car } P_A(B) = 0,8 \neq P(B) = 0,555.$$

Appliquer la formule des probabilités totales

Exercice 3. Partition en trois événements

Un magasin de vêtements a trois fournisseurs : F_1 fournit 50 % des articles, F_2 30 % et F_3 20 %. Les taux d'articles défectueux sont respectivement 2 %, 4 % et 5 %. On choisit un article au hasard et on note D l'événement « l'article est défectueux ».

1. Construire l'arbre pondéré.

Arbre : $P(F_1) = 0,50$, $P(F_2) = 0,30$, $P(F_3) = 0,20$; $P_{F_1}(D) = 0,02$, $P_{F_2}(D) = 0,04$, $P_{F_3}(D) = 0,05$, avec les probabilités complémentaires sur les autres branches.

2. Calculer $P(D)$.

$$P(D) = 0,50 \times 0,02 + 0,30 \times 0,04 + 0,20 \times 0,05 = 0,032.$$

3. Un article est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne du fournisseur F_2 ?

$$P_D(F_2) = \frac{0,30 \times 0,04}{0,032} = 0,375.$$

4. Calculer la probabilité qu'un article non défectueux provienne de F_1 .

$$P_{\bar{D}}(F_1) = \frac{0,50 \times 0,98}{1 - 0,032} = \frac{0,49}{0,968} \approx 0,506.$$

5. Calculer $P_D(F_1)$ et $P_D(F_3)$. Vérifier que $P_D(F_1) + P_D(F_2) + P_D(F_3) = 1$.

$$P_D(F_1) = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125 \text{ et } P_D(F_3) = \frac{0,01}{0,032} = 0,3125. \text{ Ainsi } 0,3125 + 0,375 + 0,3125 = 1.$$

6. Le magasin reçoit 5 000 articles. Combien d'articles défectueux peut-il prévoir?

$$5000 \times 0,032 = 160. \text{ Il peut prévoir 160 articles défectueux.}$$

7. Le magasin veut que moins de 3 % des articles soient défectueux. Il remplace F_3 par un fournisseur ayant un taux de défaut t . Quelle valeur maximale de t convient?

$$\text{Il faut } 0,50 \times 0,02 + 0,30 \times 0,04 + 0,20t < 0,03, \text{ soit } 0,022 + 0,20t < 0,03. \text{ Donc } t < 0,04 : \text{ le taux doit être strictement inférieur à 4 \% .}$$

Exercice 4. Du tableau à l'arbre

Une étude sur 2 000 clients d'une banque donne :

	Application mobile (M)	Pas d'application	Total
Moins de 40 ans (J)	720	180	900
40 ans et plus	440	660	1 100
Total	1 160	840	2 000

1. Calculer $P(J)$, $P_J(M)$ et $P_{\bar{J}}(M)$.

$$P(J) = \frac{900}{2000} = 0,45; P_J(M) = \frac{720}{900} = 0,8; P_{\bar{J}}(M) = \frac{440}{1100} = 0,4.$$

2. Construire l'arbre pondéré de premier niveau J et $\bar{J}$.

Premier niveau : $P(J) = 0,45$ et $P(\bar{J}) = 0,55$. Puis $P_J(M) = 0,8$, $P_J(\bar{M}) = 0,2$, $P_{\bar{J}}(M) = 0,4$, $P_{\bar{J}}(\bar{M}) = 0,6$.

3. Retrouver $P(M)$ par la formule des probabilités totales et vérifier avec le tableau.

$$P(M) = 0,45 \times 0,8 + 0,55 \times 0,4 = 0,58. \text{ Avec le tableau : } \frac{1160}{2000} = 0,58.$$

4. Un client utilise l'application. Quelle est la probabilité qu'il ait moins de 40 ans?

$$P_M(J) = \frac{720}{1160} = \frac{18}{29} \approx 0,621.$$

5. Calculer $P(J \cup M)$.

$$P(J \cup M) = P(J) + P(M) - P(J \cap M) = 0,45 + 0,58 - \frac{720}{2000} = 0,67.$$

6. Construire l'autre arbre, de premier niveau M et $\bar{M}$.

Premier niveau : $P(M) = 0,58$, $P(\bar{M}) = 0,42$. Puis $P_M(J) = \frac{720}{1160} \approx 0,621$, $P_M(\bar{J}) \approx 0,379$, $P_{\bar{M}}(J) = \frac{180}{840} \approx 0,214$, $P_{\bar{M}}(\bar{J}) \approx 0,786$.

7. La banque affirme : « L'âge n'a pas d'influence sur l'usage de l'application. » Qu'en pensez-vous?

Cette affirmation est fausse : $P_J(M) = 0,8$ alors que $P_{\bar{J}}(M) = 0,4$. L'usage dépend donc de la tranche d'âge.

Exercice 5. Type bac – contrôle de la qualité d'un produit

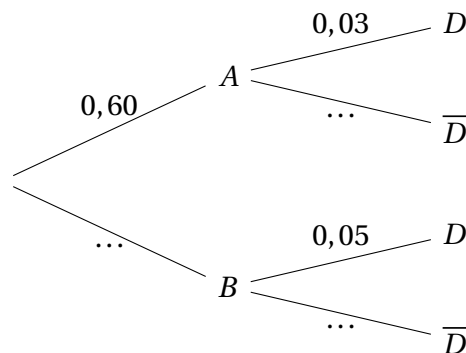
Une entreprise commercialise des batteries pour vélos électriques. Elle possède deux sites de production, notés A et B . Le site A produit 60 % des batteries et le site B produit les autres batteries.

Une batterie est contrôlée avant sa commercialisation. On note D l'événement « la batterie est déclarée défectueuse par le contrôle ». On sait que 3 % des batteries produites par le site A et 5 % des batteries produites par le site B sont déclarées défectueuses.

On choisit au hasard une batterie dans la production d'une journée.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré représentant cette situation.

$$P(A) = 0,60, P(B) = 0,40; P_A(D) = 0,03, P_A(\bar{D}) = 0,97; P_B(D) = 0,05, P_B(\bar{D}) = 0,95.$$



2. Calculer la probabilité que la batterie choisie provienne du site A et soit déclarée défectueuse.

$$P(A \cap D) = 0,60 \times 0,03 = 0,018.$$

3. Montrer que $P(D) = 0,038$.

$$P(D) = 0,60 \times 0,03 + 0,40 \times 0,05 = 0,018 + 0,020 = 0,038.$$

4. La batterie choisie est déclarée défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne du site B . Arrondir au millièm.

$$P_D(B) = \frac{0,40 \times 0,05}{0,038} = \frac{10}{19} \approx 0,526.$$

5. Les événements A et D sont-ils indépendants? Justifier.

$$\text{Non, car } P_A(D) = 0,03 \neq P(D) = 0,038.$$

6. L'entreprise produit 25 000 batteries par jour. Estimer le nombre de batteries déclarées défectueuses au cours d'une journée.

$$25\,000 \times 0,038 = 950. \text{ On estime à 950 le nombre de batteries déclarées défectueuses.}$$

7. Pour améliorer la qualité, le site B met en place une nouvelle procédure. Son taux de batteries déclarées défectueuses devient t , les autres données res-

tant inchangées. Déterminer la valeur maximale de t pour que la probabilité qu'une batterie soit déclarée défectueuse soit inférieure ou égale à 3,5 %.

$0,60 \times 0,03 + 0,40t \leq 0,035$, donc $0,018 + 0,40t \leq 0,035$. Ainsi $t \leq 0,0425$. Le taux maximal est 4,25 %.