

# Suites arithmétiques et géométriques

## I Expression

### Exemples

Pour chaque triplet, compléter le terme de rang 3 si les termes peuvent appartenir à une suite du type indiqué ; mettre une croix sinon.

| terme 0 | terme 1 | terme 2 | Suite arithmétique : terme 3 | Suite géométrique : terme 3 |
|---------|---------|---------|------------------------------|-----------------------------|
| 1       | 2       | 3       |                              |                             |
| 3       | 2       | 1       |                              |                             |
| 110     | 120     | 130     |                              |                             |
| 2       | 4       | 8       |                              |                             |
| 1000    | 100     | 10      |                              |                             |
| -7      | 7       | 17      |                              |                             |
| -12     | -3      | 6       |                              |                             |

### Définitions

Une suite est une liste de nombres indexés par des entiers. Dans ce cours, le premier terme est de rang 0 :  $u_0$  ; les suivants sont  $u_1$ ,  $u_2$ , etc.

#### Suite arithmétique

Chaque terme s'obtient en ajoutant au précédent un même nombre réel : **la raison  $r$** .

$$u_{n+1} = u_n + r$$

La différence  $u_{n+1} - u_n$  est constante.

#### Suite géométrique

Chaque terme s'obtient en multipliant le précédent par un même nombre réel : **la raison  $q$** .

$$u_{n+1} = q u_n$$

Si  $u_n \neq 0$ , le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  est constant.

En voici une représentation plus visuelle (compléter les opérations sur les flèches) :

$$u_0 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_1 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_2 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_3$$

$$u_0 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_1 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_2 \xrightarrow{\quad \cdots \quad} u_3$$

### Remarque

On peut effectuer plusieurs évolutions en une seule fois. Pour deux rangs  $i$  et  $j$  avec  $j \geq i$  :

$$u_j = u_i + (j - i)r$$

$$u_j = u_i q^{j-i}$$

Pour la formule géométrique, si  $q = 0$ , on prend  $j > i$  ; pour  $j = i$ , on a simplement  $u_j = u_i$ .

### Modélisation

Une production augmente de 20 unités par semaine : on ajoute toujours la même quantité.

Raison :  $r = \dots\dots$

Une capacité de batterie diminue de 2% par an : on multiplie toujours par le même coefficient.

Raison :  $q = \dots\dots$

### Propriété

L'expression du terme de rang  $n$  en fonction de  $n$  est :

#### Suite arithmétique

À partir du terme de rang 0 :

À partir du terme de rang 1 :

Si  $u_0 = 100$  et  $r = 20$ , exprimer  $u_n$  :

#### Suite géométrique

À partir du terme de rang 0 :

À partir du terme de rang 1 :

Si  $u_0 = 100$  et  $q = 0,98$ , exprimer  $u_n$  :

## II Moyennes

### Propriétés

La **moyenne arithmétique** de deux nombres  $a$  et  $b$  vaut :

La **moyenne géométrique** de deux nombres **positifs**  $a$  et  $b$  vaut :

### Remarque

Si  $a = u_0$  et  $b = u_2$  sont des termes d'une suite arithmétique, alors  $u_1$  est leur moyenne arithmétique.

### Remarque

Si  $a = u_0$  et  $b = u_2$  sont des termes d'une suite géométrique à termes positifs, alors  $u_1$  est leur moyenne géométrique.

## III Somme des termes

### Propriétés

Attention au nombre de termes : de  $u_0$  à  $u_{n-1}$ , il y a  $n$  termes ; de  $u_0$  à  $u_n$ , il y en a  $n + 1$ .

### Suite arithmétique

Somme des  $n$  premiers termes ( $n \geq 1$ ) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} =$$

Somme des termes de rang 0 à  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n =$$

### Suite géométrique de raison $q \neq 1$

Somme des  $n$  premiers termes ( $n \geq 1$ ) :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} =$$

Somme des termes de rang 0 à  $n$  :

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n =$$

### Remarque

Si  $q = 1$ , la suite géométrique est constante : la somme est égale au nombre de termes multiplié par  $u_0$ .

### Application

Une production hebdomadaire est modélisée par  $u_n = 100 + 20n$ . Écrire la somme donnant la production totale des 10 premières semaines, puis la calculer.

Une installation produit 100 kWh la première année, puis sa production diminue de 2% par an. Écrire la somme donnant la production des 10 premières années, puis la calculer.