

Suites géométriques

I Expression

Exemples

terme 0	terme 1	terme 2	Mettre le terme 3 si le triplet précédent peut être géométrique.
3	6	12	
100	110	121	
2	4	8	
1000	100	10	
-2	4	-8	
-12	-6	-3	

Définition

Une **suite géométrique** est une suite de nombres qui commence par un **terme de rang 0**, souvent noté u_0 et parfois appelé « premier terme ». Les termes suivants (u_1 de rang 1 ; u_2 de rang 2 etc.) s'obtiennent tous en multipliant le terme précédent par un même nombre : **la raison q** .

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

En voici une représentation plus visuelle :

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3$$

Remarque

Le dessin ci-dessus montre qu'on peut effectuer plusieurs évolutions en une seule fois. Plus précisément :

$$u_q = u_p \times q^{q-p}$$

Propriété

L'expression du terme de rang n en fonction de n est :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Exemple

Un capital de 1 500 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 4 %. On note u_n le capital obtenu après n années. La raison est $q = 1,04$, donc :

$$u_n = 1\,500 \times 1,04^n$$

II Évolutions successives

Propriété

Une hausse de t % correspond à une multiplication par $1 + \frac{t}{100}$. Une baisse de t % correspond à une multiplication par $1 - \frac{t}{100}$.

Remarque

Dans une situation d'évolutions successives de même taux, les valeurs obtenues forment une suite géométrique. Par exemple, une diminution de 15 % chaque année correspond à une raison $q = 0,85$.

Propriété

Pour une suite géométrique de premier terme positif :

Valeur de la raison q	Sens de variation de la suite
$q > 1$	croissante
$0 < q < 1$	décroissante
$q = 1$	constante

III Moyenne géométrique

Propriété

La moyenne géométrique de deux nombres strictement positifs a et b vaut :

$$\sqrt{a \times b}$$

Remarque

Si u_0 , u_1 et u_2 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique positive, alors u_1 est la moyenne géométrique de u_0 et u_2 :

$$u_1 = \sqrt{u_0 \times u_2}$$

Exemple

La moyenne géométrique de 50 et 72 vaut $\sqrt{50 \times 72} = 60$. Ainsi, 50 ; 60 ; 72 sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 1,2.

IV Somme des termes

Propriété

La somme des $n + 1$ premiers termes d'une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison $q \neq 1$ vaut :

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_{n+1} - u_0}{q - 1}$$

Exemple

Avec $u_0 = 100$ et $q = 1,02$, la somme des termes de u_0 à u_5 est :

$$\frac{100 \times 1,02^6 - 100}{1,02 - 1} \approx 630,81.$$