

DS de Mathématiques - 1 heure

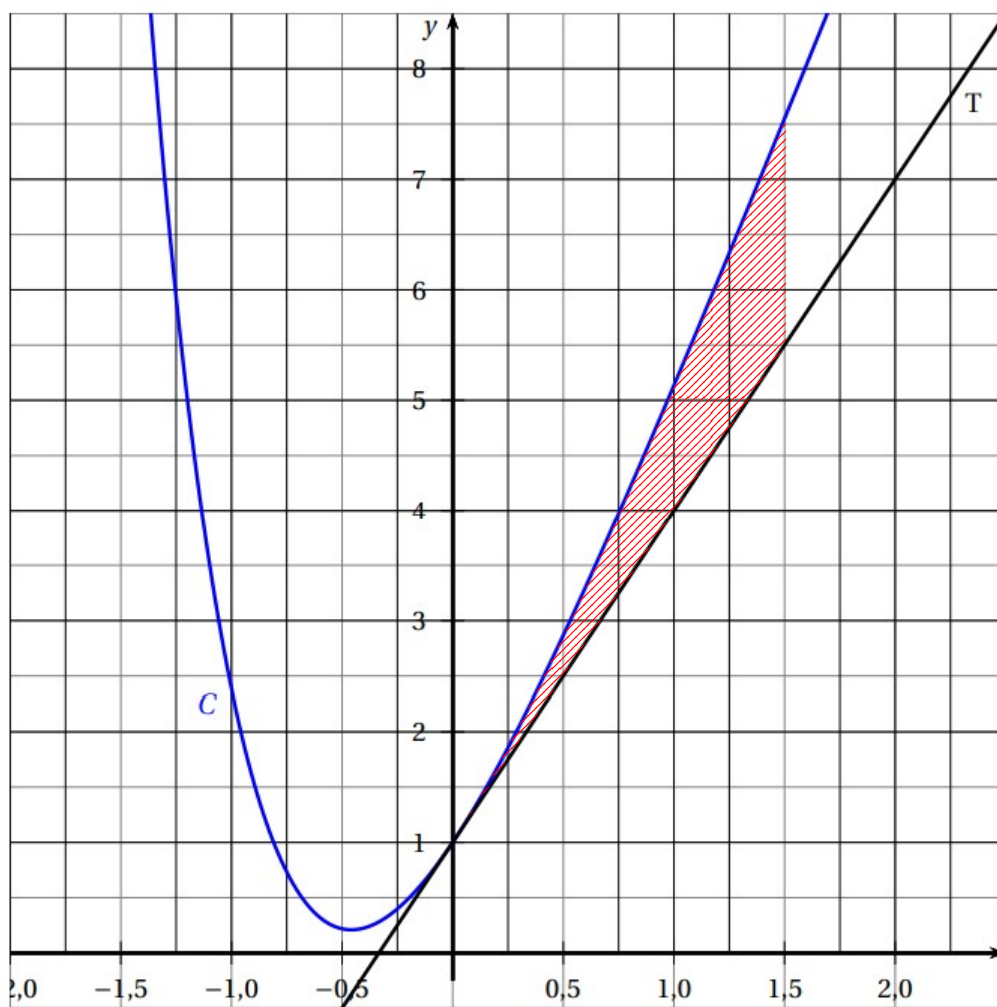
Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Communiquer	Barème
1. 2.	/3	1.	/1,5	Global	/2
2. 4.	/3	2.	/1,5		
5. 6.	/3	3. 4.	/3		
		5. 6.	/3		

Exercice 1. (9 points)

On considère la courbe C associée à une fonction f représentée ci dessous avec la droite T , tangente à la courbe C au point d'abscisse 0. L'objectif de cette partie est de déterminer par un calcul l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre la courbe C , la droite T et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = 1,5$.

La fonction dont la courbe est C a pour expression : $f(x) = e^{-2x} + 5x$



1. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[-1 ; 1,5]$ et avec la précision permise par le dessin les deux inéquations suivantes :

a. $f(x) \geq 1$

$f(x) \geq 1$ pour $x \in [-1 ; -0,8] \cup [0 ; 1,5]$.

b. $f'(x) \geq 0$.

$f'(x) \geq 0$ quand f est croissante : $x \in [-0,45; 1,5]$ environ.

2. a. Hachurer sur le dessin au dessus l'aire $\mathcal{A}$ que l'on veut déterminer.
 Voir le domaine hachuré en rouge entre C et T, pour x allant de 0 à 1,5.
 b. L'aire $\mathcal{A}$ vaut environ combien d'unités d'aire à l'entier près?

$\mathcal{A} \approx 1$ u.a.

3. Calculer la dérivée de $f(x)$?

$f'(x) = -2e^{-2x} + 5$.

4. Calculer la primitive de $f(x)$?

$F(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x} + \frac{5}{2}x^2$ (à une constante près).

5. Que vaut $\int_0^{1,5} f(x) dx$?

$\int_0^{1,5} f(x) dx = F(1,5) - F(0) = -\frac{1}{2}e^{-3} + 5,625 + \frac{1}{2} = 6,125 - \frac{1}{2}e^{-3} \approx 6,10$.

6. En déduire la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$ donc T : $y = 3x + 1$. $\int_0^{1,5} (3x + 1) dx = \left[\frac{3}{2}x^2 + x \right]_0^{1,5} = 4,875$.

La courbe est au-dessus de T donc $\mathcal{A} = 6,125 - \frac{1}{2}e^{-3} - 4,875 = 1,25 - \frac{1}{2}e^{-3} \approx 1,23$ u.a.

Exercice 2. (9 points)

1. Donner, en justifiant, le sens de variation des fonctions suivantes :

$f(x) = 125 \times 0,95^x$

$g(x) = 125^x \times 0,95$

$f(x) = 125 \times 0,95^x$ avec $125 > 0$ et $0 < 0,95 < 1$: f est décroissante.

$g(x) = 0,95 \times 125^x$ avec $0,95 > 0$ et $125 > 1$: g est croissante.

2. Si t est un taux d'évolution annuel de 34%. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer au millièmè de % près le taux quotidien moyen équivalent à t .

$1,34^{\frac{1}{365}} \approx 1,000802$: le taux quotidien moyen est d'environ 0,080 %.

3. Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 10% chaque année pendant 4 ans puis a augmenté de 6 % chaque année pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution?

$(0,9^4 \times 1,06^6)^{\frac{1}{10}} \approx 0,99284$: le taux moyen annuel est d'environ -0,72 %.

4. Simplifier au maximum : $\frac{(e^{500} \times e)^{10} \times e^9}{e^{30}}$

$\frac{e^{5010} \times e^9}{e^{30}} = e^{4989}$.

5. Simplifier au maximum : $\frac{(3^{4x} \times 3^{15})^{10} \times 2^3}{3^{x+3}}$

$$\frac{3^{40x+150} \times 8}{3^{x+3}} = 8 \times 3^{39x+147}.$$

6. On étudie le nombre de bactéries contenues dans un organisme à la suite d'une infection. Il est donné, en fonction du temps (exprimé en heures), par la fonction f définie par :

$$f(t) = 200000 \times 1,2^t \text{ pour } t \text{ compris entre 0 et 3.}$$

A la minute près, au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura augmenté de 25% ?

$$1,2^t = 1,25 \iff t = \frac{\ln(1,25)}{\ln(1,2)} \approx 1,224 \text{ h, soit } 1,224 \times 60 \approx 73 \text{ minutes : au bout de 1 h 13 min environ.}$$