

DS de Mathématiques - 1 heure

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer	Barème
1.	/1,5	1.	/1,5	1.	/1	Global	/2
2.	/1,5	2.	/1,5	2.	/1		
3.	/1,5	3.	/1,5	3.	/1,5		
4.	/1,5	4.	/1,5	4.	/1,5		
		5.	/1				

Exercice 1. (6 points)

Une voiture électrique, dont l'accumulateur est totalement déchargé, est branchée à une borne de rechargement. L'énergie emmagasinée par l'accumulateur (en kilowattheure), notée E , peut être modélisée en fonction du temps t écoulé (en heure) par la fonction E définie pour $t \in [0; +\infty[$ par : $E(t) = 18(1 - e^{-0,45t})$

- Calculer $f(0)$. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.
 $E(0) = 18(1 - e^0) = 0$: au début de la charge, l'accumulateur est vide.
- Quel est le sens de variations de $f(t)$? Justifier.
 $E'(t) = 18 \times 0,45 e^{-0,45t} = 8,1 e^{-0,45t} > 0$ car une exponentielle est strictement positive : E est croissante sur $[0; +\infty[$.
- Quelle est l'énergie de stockage maximale qu'elle pourra atteindre? Justifier.
Quand t devient très grand, $e^{-0,45t}$ se rapproche de 0, donc $E(t)$ se rapproche de 18 sans jamais l'atteindre. L'énergie de stockage maximale est 18 kWh.
- Déterminer à la minute près le moment à partir duquel la moitié de cette énergie de stockage limite a été emmagasinée.
 $18(1 - e^{-0,45t}) = 9 \iff e^{-0,45t} = 0,5 \iff -0,45t = \ln(0,5) \iff t = \frac{\ln 2}{0,45} \approx 1,540 \text{ h.}$
 $1,540 \times 60 \approx 92,4$: à partir d'environ 1 h 33 min (93 minutes), la moitié de l'énergie est emmagasinée.

Exercice 2. (7 points)

- Si t est un taux d'évolution annuel de 34%. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer au millième de % près le taux quotidien moyen équivalent à t .
 $1,34^{\frac{1}{365}} \approx 1,000802$: le taux quotidien moyen est d'environ 0,080 %.
- Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 10% chaque année pendant 4 ans puis a augmenté de 6 % chaque année pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution?
 $(0,9^4 \times 1,06^6)^{\frac{1}{10}} \approx 0,99284$: le taux moyen annuel est d'environ -0,72 %.
- Simplifier au maximum : $\frac{(e^{500} \times e)^{10} \times e^9}{e^{30}}$
 $\frac{e^{5010} \times e^9}{e^{30}} = e^{5010+9-30} = e^{4989}$.
- Simplifier au maximum : $\frac{(3^{4x} \times 3^{15})^{10} \times 2^3}{3^{x+3}}$
 $\frac{3^{40x+150} \times 8}{3^{x+3}} = 8 \times 3^{39x+147}$.

5. Donner la dérivée de $f(x) = x^2 - 2e^{3x+1}$

$$f'(x) = 2x - 2 \times 3e^{3x+1} = 2x - 6e^{3x+1}.$$

Exercice 3. (5 points)

Les organismes vivants contiennent du carbone 14 (élément radioactif). À leur mort, ce carbone 14 présent se désintègre. La concentration en carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort (t en milliers d'années) est modélisée par la fonction $f(t) = 15,3 \times 0,8833^t$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Déterminer les variations de f .

$$f(t) = k \times a^t \text{ avec } k = 15,3 > 0 \text{ et } 0 < a = 0,8833 < 1 : f \text{ est décroissante sur } [0; +\infty[.$$

2. 3000 ans après sa mort un organisme a quelle concentration de carbone 14?

$$t = 3 : f(3) = 15,3 \times 0,8833^3 \approx 10,54 \text{ unités.}$$

3. Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration de carbone 14 égale à 7,24 unités. Estimer l'âge de ces fragments à 100 ans près.

$$15,3 \times 0,8833^t = 7,24 \iff t = \frac{\ln(7,24/15,3)}{\ln(0,8833)} \approx 6,03 : \text{les fragments ont environ 6 000 ans.}$$

4. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus dater. Déterminer à 100 ans près l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

$$0,8833^t < 0,003 \iff t > \frac{\ln(0,003)}{\ln(0,8833)} \approx 46,81 : \text{à partir d'environ 46 800 ans.}$$