

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer	Barème
1.	/1	1.	/1	1.	/2	Global	/2
2.	/1,5	2.	/1	2.	/2		
3.	/2	3.	/2				
4.	/1,5	4.	/2				
5.	/2						

Exercice 1. (8 points)

On étudie le nombre de bactéries contenues dans un organisme à la suite d'une infection. Il est donné, en fonction du temps (exprimé en heures), par la fonction f définie par : $f(t) = 100\,000 \times 1,1^t$ pour t compris entre 0 et 3.

- Combien de bactéries sont présentes au début de l'étude?

$$f(0) = 100\,000 \times 1,1^0 = 100\,000 \text{ bactéries.}$$

- Le nombre de bactéries devrait évoluer comment? Justifier grâce à la fonction donnée.

$f(t) = k \times a^t$ avec $k = 100\,000 > 0$ et $a = 1,1 > 1$: f est croissante, le nombre de bactéries augmente.

- Compléter le tableau suivant en arrondissant à la dizaine.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	100 000	104 880	110 000	115 370	121 000	126 910	133 100

- Combien dénombre-t-on de bactéries au bout de 2 heures et 45 minutes?

$$2 \text{ h } 45 \text{ min} = 2,75 \text{ h} : f(2,75) = 100\,000 \times 1,1^{2,75} \approx 129\,966 \text{ bactéries.}$$

- A la minute près, au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura augmenté de 25%?

On cherche t tel que $1,1^t = 1,25$. À la calculatrice, $t \approx 2,341$ h, soit $2,341 \times 60 \approx 140$ minutes : au bout de 2 h 20 min environ.

Exercice 2. (6 points)

Les organismes vivants contiennent du carbone 14 (élément radioactif). À leur mort, ce carbone 14 présent se désintègre. La concentration en carbone 14 dans un organisme à l'instant t après sa mort (t en milliers d'années) est modélisée par la fonction $f(t) = 15,3 \times 0,8833^t$ définie sur $[0; +\infty[$.

- Déterminer les variations de f .

$$f(t) = k \times a^t \text{ avec } k = 15,3 > 0 \text{ et } 0 < a = 0,8833 < 1 : f \text{ est décroissante sur } [0; +\infty[.$$

- 3000 ans après sa mort un organisme a quelle concentration de carbone 14?

$$t = 3 : f(3) = 15,3 \times 0,8833^3 \approx 10,54 \text{ unités.}$$

- Des archéologues ont trouvé des fragments d'os présentant une concentration de carbone 14 égale à 7,24 unités. Estimer l'âge de ces fragments à 100 ans près.

On cherche t tel que $15,3 \times 0,8833^t = 7,24$. À la calculatrice (tableau de valeurs), $t \approx 6,03$. Les fragments ont environ 6 000 ans.

4. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus dater. Déterminer à 100 ans près l'âge à partir duquel un organisme ne peut plus être daté au carbone 14.

0,3 % de 15,3 vaut 0,0459. On cherche t tel que $0,8833^t < 0,003$. À la calculatrice, $t \approx 46,81$: à partir d'environ 46 800 ans, on ne peut plus dater.

Exercice 3. (4 points)

1. Si t est un taux d'évolution annuel de 24%. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer au millième de % près le taux quotidien moyen équivalent à t .

$1,24^{\frac{1}{365}} \approx 1,0005895$ donc le taux quotidien moyen est d'environ 0,059 %.

2. Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11% pendant 4 ans puis a augmenté de 8 % pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

Coefficient global sur 10 ans : $0,89^4 \times 1,08^6 \approx 0,9956$. Coefficient moyen annuel : $(0,89^4 \times 1,08^6)^{\frac{1}{10}} \approx 0,99956$, soit un taux moyen annuel d'environ -0,04 %.