

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Exercice 3	Barème	Communiquer	Barème
1.	/1,5	1.	/2	1.	/1	Global	/2
2.	/2	2.	/2	2.	/1		
3.	/2			3.	/1,5		
4.	/2			4.	/1,5		
				5.	/1,5		

Exercice 1. (7,5 points)

1. Donner, en justifiant, le sens de variation des fonctions suivantes :

$$f(x) = 15 \times 0,89^x$$

$$g(x) = 0,15 \times 89^x$$

f est de la forme $k \times a^x$ avec $k = 15 > 0$ et $0 < a = 0,89 < 1$: f est décroissante sur $[0; +\infty[$.

g est de la forme $k \times a^x$ avec $k = 0,15 > 0$ et $a = 89 > 1$: g est croissante sur $[0; +\infty[$.

2. Si t est un taux d'évolution annuel de 24%. En prenant 1 an = 365 jours, déterminer au millièm de % près le taux quotidien moyen équivalent à t .

$1,24^{\frac{1}{365}} \approx 1,0005895$ donc le taux quotidien moyen est d'environ 0,059 %.

3. Le niveau de l'eau d'une rivière a baissé de 11% pendant 4 ans puis a augmenté de 8 % pendant 6 ans. Quel est le taux moyen annuel d'évolution ?

Coefficient global sur 10 ans : $0,89^4 \times 1,08^6 \approx 0,9956$.

Coefficient moyen annuel : $(0,89^4 \times 1,08^6)^{\frac{1}{10}} \approx 0,99956$, soit un taux moyen annuel d'environ -0,04 %.

4. Le prix d'un produit augmente de 8% par an. Au bout de combien de mois aura-t-il augmenté de 80% ?

Coefficient mensuel : $1,08^{\frac{1}{12}}$. On cherche le plus petit entier n tel que $1,08^{\frac{n}{12}} \geq 1,8$.

À la calculatrice : $1,08^{\frac{91}{12}} \approx 1,7925$ et $1,08^{\frac{92}{12}} \approx 1,8040$. Le prix aura augmenté de 80 % au bout de 92 mois.

Exercice 2. (4 points)

Simplifier au maximum :

$$1. \frac{(7^{25} \times 7^{15})^{30}}{7^5 \times 7^{120}}$$

$$\frac{(7^{40})^{30}}{7^{125}} = \frac{7^{1200}}{7^{125}} = 7^{1075}.$$

$$2. \frac{(5^{300} \times 5^{15})^{10} \times 5 \times 7^3}{\sqrt{5} \times 5^{12}}$$

$$\frac{(5^{315})^{10} \times 5^1 \times 7^3}{5^{0,5} \times 5^{12}} = \frac{5^{3151} \times 7^3}{5^{12,5}} = 5^{3138,5} \times 7^3 = 343 \times 5^{3138,5}.$$

Exercice 3. (6,5 points)

On étudie le nombre de bactéries contenues dans un organisme à la suite d'une infection. Il est donné, en fonction du temps (exprimé en heures), par la fonction f définie par : $f(t) = 200\,000 \times 1,1^t$ pour t compris entre 0 et 3.

1. Combien de bactéries sont présentes au début de l'étude?

$$f(0) = 200\,000 \times 1,1^0 = 200\,000 \text{ bactéries.}$$

2. Le nombre de bactéries devrait évoluer comment? Justifier grâce à la fonction donnée.

$f(t) = k \times a^t$ avec $k = 200\,000 > 0$ et $a = 1,1 > 1$: f est croissante, le nombre de bactéries augmente.

3. Compléter le tableau suivant en arrondissant à la dizaine.

t	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3
$f(t)$	200 000	209 760	220 000	230 740	242 000	253 810	266 200

4. Combien dénombre-t-on de bactéries au bout de 2 heures et 45 minutes?

$$2 \text{ h } 45 \text{ min} = 2,75 \text{ h} : f(2,75) = 200\,000 \times 1,1^{2,75} \approx 259\,932 \text{ bactéries.}$$

5. A la minute près, au bout de combien de temps le nombre de bactéries aura triplé?

On cherche t tel que $1,1^t = 3$. À la calculatrice, $t \approx 11,53$ h, soit environ 11 h 32 min. Remarque : cette durée dépasse l'intervalle d'étude $[0; 3]$; sur cet intervalle le nombre de bactéries ne triple pas (au maximum $f(3) = 266\,200$).