

DS de Mathématiques

Durée 1 heure.

Tout au long du devoir rédiger précisément en justifiant à chaque fois.

Exercice 1	Barème	Exercice 2	Barème	Communiquer	Barème
1.2.	/2	1.	/3	Global	/2
3.	/2	2.	/2		
4.	/2	3.	/2		
5.	/1	4.	/2		
6.	/2				

Exercice 1. (9 points)

On injecte une dose de 2 mL d'un médicament anti-douleur à un patient. La quantité de médicament présente dans l'organisme diminue chaque heure de 4 %.

1. Expliquer pourquoi on peut modéliser la quantité de médicament présent dans l'organisme par la fonction $f(t) = 2 \times 0,96^t$ où t désigne la durée écoulée, exprimée en heures, depuis l'injection.

Diminuer de 4% revient à multiplier par $1 - \frac{4}{100} = 0,96$ chaque heure. La quantité initiale étant 2 mL, la quantité au bout de t heures est $f(t) = 2 \times 0,96^t$.

2. Quelle quantité de médicament est présente dans l'organisme 6 heures et 30 minutes après l'injection?

6 h 30 min = 6,5 h : $f(6,5) = 2 \times 0,96^{6,5} \approx 1,53$ mL.

3. Résoudre $2 \times 0,96^t = 0,5$. Que peut-on en déduire concernant le patient?

$$2 \times 0,96^t = 0,5 \iff 0,96^t = 0,25 \iff t \log(0,96) = \log(0,25) \iff t = \frac{\log(0,25)}{\log(0,96)} \approx 33,96.$$

Environ 34 heures après l'injection, il ne reste plus que le quart de la dose initiale, soit 0,5 mL.

4. Au bout de combien de temps la quantité de médicament sera inférieure à 1,2 mL? Arrondir au centième.

$$2 \times 0,96^t < 1,2 \iff 0,96^t < 0,6 \iff t \log(0,96) < \log(0,6) \iff t > \frac{\log(0,6)}{\log(0,96)} \approx 12,51 \text{ (on change le sens car } \log(0,96) < 0).$$

La quantité sera inférieure à 1,2 mL au bout d'environ 12,51 heures.

5. À combien de minutes cela correspond-il?

$12,51 \times 60 \approx 751$ minutes, soit 12 h 31 min.

6. Déterminer la durée nécessaire, **en minutes**, pour que la quantité de médicament présente dans l'organisme après injection soit inférieure à 30% de la quantité initiale.

$$30\% \text{ de } 2 \text{ mL font } 0,6 \text{ mL. } 2 \times 0,96^t < 0,6 \iff 0,96^t < 0,3 \iff t > \frac{\log(0,3)}{\log(0,96)} \approx 29,49 \text{ h.}$$

$29,49 \times 60 \approx 1\,770$: il faut environ 1 770 minutes.

Exercice 2. (9 points)

4 % des stylos utilisés par une entreprise possèdent un défaut de fabrication. L'entreprise confectonne des paquets contenant chacun 10 stylos.

On appelle X la variable aléatoire donnant pour un paquet le nombre de stylos qui possèdent un défaut de fabrication.

1. Expliquer pourquoi la variable aléatoire X suit une loi binomiale et en préciser les paramètres.

On répète 10 fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli dont le succès « le stylo a un défaut » a pour probabilité $p = 0,04$. X compte le nombre de succès : X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,04$.

2. Calculer la probabilité qu'aucun stylo ne possède un défaut dans un paquet de 10 stylos.

$$P(X = 0) = 0,96^{10} \approx 0,665.$$

3. Calcule $P(X = 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0,04^1 \times 0,96^9 \approx 0,277. \text{ Il y a environ } 27,7\% \text{ de chances qu'un paquet contienne exactement un stylo défectueux.}$$

4. Calculer la probabilité qu'il y ait au maximum 2 stylos possédant un défaut dans un paquet.

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \approx 0,665 + 0,277 + 0,052 \approx 0,994.$$